Sur les points fixes et les cycles répulsifs au voisinage d'une singularité essentielle isolée à l'instar de la méthode de Zalcman *

Claudi Meneghin

December 23, 2008

Résumé Soit g une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité essentielle isolée v: si g y omet une valeur complexe, alors v peut être approché par une suite de points fixes répulsifs de g, dont les multiplicateurs divergent à ∞. Cela entraîne que les fonctions entières omettant une valeur et les applications du plan complexe épointé (sauf les applications de Möbius) ont une infinité de points fixes répulsifs dont les multiplicateurs divergent. Dès un autre point de vue, nous montrons que, si v n'est pas une valeur exceptionnelle au sens de Picard pour g, alors v peut être approchée par une suite de points périodiques d'ordre deux de g, ces cycles étant répulsifs (avec multiplicateurs divergeant à ∞) si v n'est pas une valeur complètement ramifiée.

Abstract Let g be a holomorphic function in the neighbourhoods of an isolated essential singularity v: if g omits a complex value there, then v may be approached by a sequence of repelling fixed points for g, whose multipliers diverge to ∞. This implies that an entire function omitting a value or a non-Möbius self-map of the punctured plane admit infinite repelling fixed points, whose multipliers diverge to ∞. By another point of view, we show that, if v is not Picard-exceptional for g, then v can be approached by a sequence of 2-cycles of g: these cycles are repelling if v is not a completely branched value.

*AMS MSC: 37F25, 37F05

1 Introduction

Soit $v \in \mathbb{C}$ et g une fonction holomorphe (à singularité essentielle isolée en v) sur un voisinage épointé $\mathcal{W} \setminus \{v\}$ de v. Dans le théorème 7, nous montrons que, si g omet une valeur complexe α au voisinage de v, alors v peut être approché par une suite de points fixes répulsifs $\{q_n\} \to v$ de g, dont les multiplicateurs $g'(q_n)$ divergent à ∞. On montrera cela en distinguant les cas $v = \alpha$ et $v \neq \alpha$. Cela entraînera (corollaire 8) que les fonctions entières omettant une valeur complexe et les applications du plan complexe épointé $\mathbb{C}^*$ (sauf les applications de Möbius) ont une infinité de point fixes répulsifs dont les multiplicateurs divergent.

Dès un point de vue différent, nous montrerons aussi (théorème 9) que, si v n'est pas une valeur exceptionelle de g (au sens de Picard) au voisinage de v, alors il existe une suite $\{q_n\} \to v$ de cycles d'ordre deux de g; si v n'est pas une valeur complètement ramifiée, ces cycles-là sont répulsifs (avec multiplicateurs divergeant à ∞) .

Dans cet article, on utilisera un théorème de Lehto et Virtanen sur la croissance de la dérivée sphérique au voisinage d'une singularité essentielle isolée (théorème 3, voir [LHV2], [LEH]) et une généralisation d'un lemme métrique de Gromov (lemme 5, voir [GRM], p.256).

Cela montrera que la composition à la source de g avec une suite de contractions bien choisies permet de construire (à l'instar de la méthode de Zalcman, voir [ZAL]) une fonction holomorphe entière limite; l'application des théorèmes de Picard, Hurwitz (voir par exemple [BTM], p.8), et des quatre valeurs complètement ramifiées (voir par exemple [BGW], th. 29 et 30) aux objets ainsi obtenus nous menera à la conclusion.

2 Préliminaires

Rappelons tout d'abord l'énoncé du théorème 2 en [LHV]:

Théorème 1 *Soit f une fonction méromorphe au voisinage $\mathcal{U}$ de la singularité essentielle $z = \infty$; soit $f^\sharp$ la dérivée sphérique de f: alors*

$$\limsup_{z \to \infty} |z| \cdot f^\sharp(z) < \infty$$

si et seulement si f est faiblement normal en $\mathcal{U}$.

Nous rappelons que f est dit *faiblement normal* sur un domaine $\mathcal{D}$ si, pour chaque sous-domaine simplement connexe $G \subset \mathcal{D}$, la famille $\{f \circ S\}_{S \in \mathtt{Aut}(G)}$, indexée sur les automorphismes de G, est normale.

En appliquant l'inversion $z \mapsto 1/(z-v)$ (voir aussi [LEH], point 2), on obtient:

Théorème 2 *Soit f : une fonction méromorphe sur $\mathcal{W}$, ayant une singularité essentielle à v. Alors*

$$\limsup_{z \to v} |z-v| \cdot f^\sharp(z) < \infty$$

si et seulement si f est faiblement normal sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$.

Nous utiliserons la conséquence suivante des théorèmes 1, 2 et du théorème 2 de [LHV2]:

Théorème 3 *Soit $v \in \mathbb{C}$, $\mathcal{W}$ un voisinage de v in $\mathbb{C}$; soit g une fonction holomorphe $\mathcal{W} \setminus \{v\} \to \mathbb{C}$, ayant une singularité essentielle isolée à v et omettant une valeur complexe α au voisinage de v. Alors*

$$\limsup_{z \to v} |z-v| \cdot g^\sharp(z) = \infty.$$

Démonstration: grâce au théorème d'Iversen, la valeur α est un valeur asymptotique de g; grâce au théorème 2 en [LHV2] (voir aussi [LHV], point 7), g n'est pas faiblement normal en $\mathcal{W} \setminus \{v\}$; la thèse s'ensuit alors du théorème 1. ■

On montre aussi dans [LEH] que $\limsup_{z \to v} |z-v| \cdot g^\sharp(z) \geq 1/2$ pour toute fonction méromorphe sur $\mathcal{W} \setminus \{v\} \to \mathbb{C}$, ayant une singularité essentielle isolée à v: nous n'utiliserons pas ce résultat dans cet article. On se bornera à noter que l'essai à appliquer les techniques de renormalisation decrites dans le théorème 6 à des fonctions méromorphes faiblement normales produit des fonctions méromorphes, à dérivée sphérique bornée, sur un disque.

Rappelons maintenant une conséquence presque immediate du théorème 31 de [BGW]:

Lemme 4 *Soit $p \in \mathbb{C}$ et h une fonction entière transcendante omettant la valeur p: alors h n'a pas de valeurs complètement ramifiées.*

Démonstration: grâce au théorème 31 de [BGW],

$$h|_{\mathbb{C}\setminus\{p\}} : \mathbb{C} \setminus \{p\} \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$$

n'a pas de valeurs complètement ramifiées sur $\mathbb{C} \setminus \{p\}$, ce qui entraîne que h n'a pas de valeurs complètement ramifiées sur $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ non plus. Grâce au théorème de Picard, la valeur $h(p) \neq p$ est prise une infinité de fois par h sur $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ aussi bien, ce qui entraîne qu'elle n'est pas complètement ramifiée pour h. ■

Le lemme suivant est une version renforcée du lemme de l'espace métrique (voir [GRM], p. 256):

Lemme 5 *Soit (X, d) un espace métrique complet, $Y \subset X$ un sous-ensemble de X tel que $X \setminus \overline{Y} \neq \emptyset$ et $M : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction localement bornée sur $X \setminus \overline{Y}$. Soit $\sigma > 0$: alors, pour tout $u \in X$ tel que $d(Y, u) > 2/\sigma M(u)$ il existe $w \in X$ tel que:*

$$\texttt{(i)}\ d(u, w) \leq [\sigma M(u)]^{-1} \tag{1}$$

$$\texttt{(ii)}\ M(w) \geq M(u) \tag{2}$$

$$\texttt{(iii)}\ \overline{D}\left(w, [\sigma M(w)]^{-1}\right) \cap Y = \emptyset \tag{3}$$

$$\texttt{(iv)}\ d(x, w) \leq [\sigma M(w)]^{-1} \Rightarrow M(x) \leq 2M(w). \tag{4}$$

Démonstration: $u \in X \setminus \overline{Y}$ tel que $d(Y, u) > 2/\sigma M(u)$ étant donné, supposons par l'absurde qu'il n'existe pas un tel w. Alors $v_0 := u$ ne convient pas. Comme cette valeur de w vérifie automatiquement (1), (2) et (3), elle doit violer la condition (4). Ainsi on peut trouver $v_1 \in X$ tel que:

$$M(v_1) > 2M(v_0) \tag{5}$$

$$d(v_1, v_0) \leq [\sigma M(v_0)]^{-1}. \tag{6}$$

Par conséquent, v_1 aussi vérifie l'hypothèse du lemme, car

$$\begin{aligned} d(Y, v_1) &\geq d(Y, v_0) - d(v_1, v_0) \\ &\geq 2[\sigma M(v_0)]^{-1} - [\sigma M(v_0)]^{-1} \ \texttt{[hypothèse et (6)]} \\ &= [\sigma M(v_0)]^{-1} \\ &> 2[\sigma M(v_1)]^{-1} \ \texttt{[grâce à (5)]}. \end{aligned}$$

Par induction, on peut ainsi construire une suite $\{v_n\}$ telle que $v_0 = u$, $M(v_{n+1}) > 2M(v_n)$ mais $d(v_n, v_{n+1}) \leq [\sigma M(v_n)]^{-1}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} M(v_n) &\geq 2^n M(v_0) & (7) \\ d(v_n, v_{n+1}) &\leq [2^n \sigma M(v_0)]^{-1}. & (8) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} d(v_n, v_{n+k}) &\leq \sum_{l=n}^{n+k-1} d(v_l, v_{l+1}) < \sum_{l=n}^{\infty} d(v_l, v_{l+1}) \\ &\leq [\sigma M(v_0)]^{-1} \sum_{l=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l \ \texttt{[grâce à (8)]} \\ &= [\sigma M(v_0)]^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \qquad (9) \end{aligned}$$

La suite $\{v_n\}$ est donc de Cauchy: en soit λ la valeur limite. En rappelant que $v_0 = u$, on a, grâce à (9),

$$d(u, \lambda) = \lim_{k \to \infty} d(v_0, v_k) \leq 2[\sigma M(u)]^{-1},$$

ce qui entraîne

$$d(Y, \lambda) \geq d(Y, u) - d(u, \lambda) > 0$$

car $d(Y, u) > 2[\sigma M(u)]^{-1}$. Ainsi $\lambda \notin \overline{Y}$.

Par contre, grâce à (7), M n'est pas borné au voisinage de λ: c'est une contradiction. ■

Le lemme suivant renormalise, à l'instar de la méthode de Zalcman (voir par exemple [ZAL]), une fonction holomorphe g au voisinage d'une singularité essentielle isolée. En effet, on procédera en composant g avec un suite de contractions; pourtant, on ne sera pas concerné avec une famille pas normale de fonctions méromophes, mais avec une seule fonction à singularité essentielle isolée.

Lemme 6 *Soient $v \in \mathbb{C}$, $\mathcal{W}$ un voisinage fermé de v, g une fonction holomorphe sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v. Alors il existe des suites $\{v_n\} \to v$, $\{r_n\} \subset \mathbb{R}^+$, avec $\{r_n\} \to 0$, telles que $\{g(v_n + r_n z)\}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une application holomorphe*

non constante $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la dérivée sphérique $h^\sharp$ est bornée sur $\mathbb{C}$. En outre, si g ne prend pas la valeur $\alpha \in \mathbb{C}$ sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, alors h ne prend pas la valeur α non plus.

Démonstration: grâce au théorème 3, on peut trouver des suites $\{\lambda_n\} \to +\infty$ en $\mathbb{R}$ et $\{\xi_n\} \to v$ en $\mathcal{W} \setminus \{v\}$ telles que

$$|\xi_n - v| \cdot g^\sharp(\xi_n) = \lambda_n. \tag{10}$$

Pour tout n, le lemme 5 est applicable à $\mathcal{W}$ avec la métrique euclidéenne, $Y = \{v\}$, $M(x) = g^\sharp(x)$, $u = \xi_n$ et $\sigma = 3/\lambda_n$: en effet, grâce à (10),

$$d(Y, u) = |\xi_n - v| = \frac{\lambda_n}{g^\sharp(\xi_n)} = \frac{3}{\sigma g^\sharp(\xi_n)} > \frac{2}{\sigma g^\sharp(\xi_n)} = \frac{2}{\sigma M(u)}\,.$$

On obtient $v_n \in \mathcal{W}$ tel que:

$$\texttt{(i)}\ \ |\xi_n - v_n| \le \lambda_n / g^\sharp(\xi_n) = |\xi_n - v| \tag{11}$$

$$\texttt{(ii)}\ \ g^\sharp(v_n) \ge g^\sharp(\xi_n) \tag{12}$$

$$\texttt{(iii)}\ \ \overline{\mathbb{D}}(v_n, |\xi_n - v|/3) \cap \{v\} = \emptyset \tag{13}$$

$$\texttt{(iv)}\ \ |x - v_n| \le \frac{\lambda_n}{3g^\sharp(v_n)} \Rightarrow g^\sharp(x) \le 2g^\sharp(v_n)\,. \tag{14}$$

Posons maintenant $r_n := [3g^\sharp(v_n)]^{-1}$ et $h_n(z) := g(v_n + r_n z)$. Or, $v_n \to v$ car, grâce à (11),

$$|v_n - v| \le |\xi_n - v_n| + |\xi_n - v| \le 2\,|\xi_n - v|.$$

Ainsi, on voit sur (12) et (14) que

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{D}(0, \lambda_n) \quad &\Rightarrow \quad v_n + r_n z \in \mathbb{D}\left(v_n, \frac{\lambda_n}{[3g^\sharp(v_n)]}\right) \\ &\subset \quad \mathbb{D}\left(v_n, \frac{\lambda_n}{[3g^\sharp(\xi_n)]}\right) \\ &= \quad \mathbb{D}\left(v_n, |\xi_n - v|/3\right) \\ &\subset \quad \mathcal{W}^\circ, \end{aligned}$$

pour n suffisamment grand (ce que nous sous-entendrons dans la suite).

Grâce à (13), chaque h_n est bien défini sur $\mathbb{D}(0,\lambda_n)$. La famille $\{h_n\}$ est normale, car, grâce à (14)

$$z \in \mathbb{D}(0,\lambda_n) \Rightarrow h_n^\sharp(z) = f_n^\sharp\left(v_n + \frac{z}{[3g^\sharp(v_n)]}\right)[3g^\sharp(v_n)]^{-1} \leq 2.$$

Grâce au théorème d'Ascoli, et au fait que $\{\lambda_n\} \to \infty$, on peut extraire de $\{h_n\}$ une sous-suite uniformément convergente (que nous appellerons encore $\{h_n\}$) sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une application méromorphe limite h. Cette application jouit de la propriété que

$$h^\sharp(0) = \lim_{n\to\infty} h_n^\sharp(0) = 1/3;$$

cela prouve qu'elle n'est pas constante. Comme, pour tout n, h_n ne prend pas la valeur ∞ sur $\mathbb{D}(0,\lambda_n)$, grâce au lemme de Hurwitz, h ne prend pas la valeur ∞: c'est donc holomorphe. On a aussi, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$h^\sharp(z) = \lim_{n\to\infty} {h_n}^\sharp(z) \leq 2.$$

En outre, si g ne prend pas la valeur α sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, alors, pour tout n, h_n ne prend pas la valeur α sur $\mathbb{D}(0,\lambda_n)$ et, grâce une fois de plus au lemme de Hurwitz, h ne prend pas la valeur α. ■

3 Les résultats principaux

Théorème 7 *Soient $v \in \mathbb{C}$, $\mathcal{W}$ un voisinage fermé de v, g une fonction holomorphe sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v. S'il existe une valeur complexe α omise par g sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, alors il existe une suite $\{q_n\} \to v$ de points fixes répulsifs de g, dont les multiplicateurs divergent à ∞.*

Démonstration:
A) Considérons d'abord le cas $\alpha \neq v$: gràce au lemme 6, on trouve des suites $\{v_n\} \to v$ et $\{r_n\} \downarrow 0$ telles que $h_n(z) := \{g(v_n + r_n z)\}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction holomorphe entière non constante h (à valeurs en $\mathbb{C}$). Grâce au lemme 6 h omet la valeur $\alpha \neq v$, donc, grâce au théorème de Picard, il prend la valeur v, cette valeur n'étant

pas complètement ramifiée, grâce au lemme 4. On en tire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} h(z_0) = v \\ h'(z_0) \neq 0. \end{cases} \tag{15}$$

Or, $z \mapsto g(v_n + r_n z) - (v_n + r_n z)$ converge, apres eventuelle extraction, vers $h - v$, et $h(z_0) - v = 0$, donc le lemme de Hurwitz nous passe une suite de points $\{z_n\} \to z_0$ tels que $g(v_n + r_n z_n) = (v_n + r_n z_n)$: ainsi les points $q_n := v_n + r_n z_n$ forment une suite $\{q_n\} \to v$ de points fixes de g.

Ces points sont répulsifs (pour n assez grand): on a, d'un côté, grâce au choix de z_0 en (15):

$$(g \circ h)'(z_0) = h'(z_0) \cdot g'(h(z_0)) \neq 0;$$

de l'autre côté, $r_n \to 0$ et

$$r_n \cdot g'(v_n + r_n z_n) = h_n'(z_n) \to h'(z_0),$$

ce qui prouve que, pour n assez grand, les q_n sont répulsifs et $g'(q_n) \to \infty$.

`B)` Soit maintenant $\alpha = v$, c'est-à-dire g omet la même valeur complexe v au voisinage de la singularité essentielle v.

Appliquons le lemme 6 à la fonction $\breve{g}$ definie par

$$\breve{g}(z) = \frac{g(z) - v}{z - v} :$$

c'est correct, car cette fonction est holomorphe (à valeurs en $\mathbb{C}$) sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, a une singularité essentielle isolée en $z = v$ et ne prend pas la valeur 0 sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$.

On trouve donc $\{v_n\} \to v$ et $\{r_n\} \to 0$ tels que

$$h_n(z) := \frac{g(v_n + r_n z_n - v)}{v_n + r_n z_n - v} \longrightarrow h(z), \tag{16}$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$, où h est une fonction holomorphe entière non constante. Grâce au lemme 6, h n'a pas de pôles, donc on a:

$$\left| \frac{v - v_n}{r_n} \right| \longrightarrow \infty \tag{17}$$

en (16), car sinon $\lim_{n\to\infty}(v - v_n)/r_n$ serait un pôle pour h.

Grâce au lemme 6, h ne prend pas la valeur 0: grâce au théorème de Picard, h prend alors la valeur 1. Cette valeur n'est pas complètement ramifiée, grâce au lemme 4. Il existe alors $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} h(z_0) = 1 \\ h'(z_0) \neq 0. \end{cases} \tag{18}$$

Le lemme de Hurwitz nous passe une suite de points $\{z_n\} \to z_0$ tels que

$$\frac{g(v_n + r_n z_n) - v}{(v_n + r_n z_n) - v} = 1;$$

ainsi les points $q_n := v_n + r_n z_n$ forment une suite $\{q_n\} \to v$ de points fixes de g. Prouvons que ces points sont répulsifs (pour n assez grand). On a, par définition:

$$g(v_n + r_n z_n) = v + (v_n + r_n z_n - v) \cdot h_n(z).$$

En dérivant en $z = z_n$ et en divisant pour r_n, on obtient

$$g'(v_n + r_n z_n) \quad = \quad h_n(z_n) + \left(\frac{v - v_n}{r_n} + z_n \right) h_n'(z_n)$$

Grâce à (17), $|(v - v_n)/r_n| \longrightarrow \infty$; comme on a aussi $h_n(z_n) \to h(z_0)$ et $h_n'(z_n) \to h'(z_0) \neq 0$ (voir (18)), on en tire que $g'(v_n + r_n z_n) \to \infty$, ce qui conclut la démonstration. ■

Le théorème 7 comporte que les fonctions entières omettant une valeur et les applications du plan complexe épointé (sauf les applications de Möbius) ont une infinité de points fixes répulsifs dont les multiplicateurs divergent à ∞:

Corollaire 8 *Soit f:* `A)` *une fonction entière omettant une valeur, ou* `B)` *une application du plan complexe épointé $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ne se reduissant pas à une applications de Möbius. Alors il existe une suite infinie $\{\zeta\}_n$ de points fixes répulsifs de f dont les multiplicateurs divergent à ∞.*

Démonstration: dans le cas `A)` supposons, sans nuire à la généralité, que la valeur omise soit 0. Posons $g(z) := 1/f(1/z)$; dans le cas `B)`, l'un au moins des points 0 et ∞ est une singularité essentielle isolée. Dans le premier sous-cas, posons $g := f$, dans le deuxième $g(z) := 1/f(1/z)$.

Dans les deux cas `A)` et `B)`, g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a une singularité essentielle isolée à $z = 0$ et ne prend jamais la valeur 0. On peut alors appliquer le théroème 7 à g, avec $\mathcal{W} = \mathbb{C}$ et $v = \alpha = 0$. Ainsi, il existe une infinité $z_n \to 0$ de points fixes répulsifs de g dont les multiplicateurs divergent à ∞. Cela conclut la démonstration, car les multiplicateurs des points fixes sont invariants à conjugaison avec l'inversion $z \mapsto 1/z$ près. ■

Voici le dernier résultat:

Théorème 9 *Soient $v \in \mathbb{C}$, $\mathcal{W}$ un voisinage fermé de v, g une fonction holomorphe sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v. Si v n'est pas une valeur exceptionelle de g (au sens de Picard) au voisinage de v, il existe une suite $\{q_n\} \to v$ de 2-cycles de g. En outre, si v n'est pas une valeur complètement ramifiée de g, les $\{q_n\}$ peuvent être choisis répulsifs, avec multiplicateurs divergeant à ∞.*

Démonstration: grâce au lemme 6, on trouve des suites $\{v_n\} \to v$ et $\{r_n\} \downarrow 0$ telles que $\{h_n(z)\} := \{g(v_n + r_n z)\}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction holomorphe entière non constante h. Grâce à l'hypothèse sur le caractère non exceptionnel de la valeur v, l'ensemble

$$\mathcal{S} := g^{-1}(v) \cap \mathcal{W}^\circ \setminus \{v\}$$

est infini. Grâce aux théorème de Picard (ou de façon banale, si h est un polynôme) il existe

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \\ w \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{19}$$

tels que $h(z_0) = w$. Par continuité, il existe aussi un voisinage $\mathcal{U}$ de z_0 tel que $h(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}^\circ \setminus \{v\}$ et, par conséquent, les $g^{\circ 2}(v_n + r_n z)$ sont bien définis, pour n assez grand, sur $\mathcal{U}$. Or, $z \mapsto \{g^{\circ 2}(v_n + r_n z) - (v_n + r_n z)\}$ converge, après eventuelle extraction, vers $g \circ h - v$ uniformément sur tout compact de $\mathcal{U}$. Comme $g \circ h(z_0) - v = g(w) - v = 0$, le lemme de Hurwitz nous passe une suite de points $\{z_n\} \to z_0$ tels que $g^{\circ 2}(v_n + r_n z_n) - (v_n + r_n z_n) = 0$, ainsi les points $q_n := v_n + r_n z_n$ forment une suite $\{q_n\} \to v$ de 2-cycles de g. Si, de plus, v n'est pas une valeur complètement ramifiée de g, on peut choisir les $z_0 \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathcal{S}$ en (19) de façon que

$$\begin{cases} h(z_0) = w \\ h'(z_0) \neq 0 \\ g'(w) \neq 0. \end{cases} \tag{20}$$

En effet, comme la valeur v n'est pas complètement ramifiée, l'ensemble

$$\mathcal{T} := \{w \in \mathcal{S} : g'(w) \neq 0\}$$

(et, par conséquent, $h^{-1}(\mathcal{T})$) est infini. L'ensemble

$$\{z \in h^{-1}(\mathcal{T}) : h'(z) \neq 0\}$$

est de même infini: cela découle, si h est transcendant, du théorème des quatre valeurs complètement ramifiées; si h est un polynôme, alors ceci s'ensuit tout simplement du fait que l'ensemble $\{z | h'(z) = 0\}$ est fini. Cela prouve (20): avec ce choix de w et z_0, on a:

$$(g \circ h)'(z_0) = h'(z_0) \cdot g'(h(z_0)) \neq 0;$$

d'autre côté, $r_n \to 0$ et

$$r_n \cdot (g^{\circ 2})'(v_n + r_n z_n) = (g \circ h_n)'(z_n) \to (g \circ h)'(z_0),$$

ainsi, pour n assez grand, les q_n sont répulsifs; on a aussi $(g^{\circ 2})'(q_n) \to \infty$. ∎

References

[BGW] W.Bergweiler, *An introduction to complex dynamics* Textos de matemática, Universidade de Coimbra, Série B No.6 (1995)

[BTM] François Berteloot, Volker Mayer *Rudiments de dynamique holomorphe* Société Mathématique de France, EDP Sciences, 2001

[GRM] M.Gromov, *Foliated plateau problem: part II: harmonic maps of foliations* GAFA, Vol. 1, No. 3 (1991), 253-320

[LEH] Olli Lehto, *The spherical derivative of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity* Commentarii Mathematici Helvetici, vol 33 p.196-205

[LHV] O.Lehto and K.I.Virtanen *On the behaviour of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity* Ann. Acad. Sci. Fenn. - Mathematica 240 (1957)

[LHV2] O.Lehto and K.I.Virtanen *Boundary behaviour and normal meromorphic functions* Acta Math. 97 (1957)

[ZAL] L.Zalcman *Normal Families: new perspectives* Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1998)

L'adresse de l'auteur:
CLAUDIO MENEGHINI
INSTITUD DE STUDIS RHAETO CISALPINS
FERMO POSTA CHIASSO 1
CH 6830 CHIASSO - SUISSE